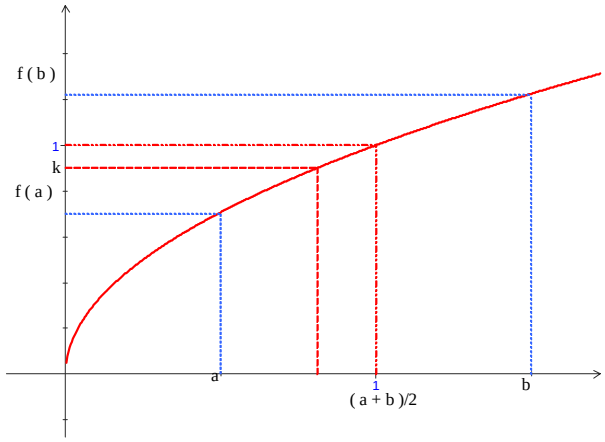
Théorème de la bijection : Soit f une fonction continue strictement monotone (on traitera ici strictement croissante) sur $[a;b]$ et k un nombre appartenant à $[f(a);f(b)]$. Alors, l'équation $f(x)=k$ **admet une solution unique** sur $[a;b]$

L'idée de la démontration est de trouver deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) telles que $f(a_n) \leq k \leq (b_n)$.
On aura alors l'assurance de l'existence d'une limite c commune aux deux suites. Nous montrerons alors que $f(c)=k$ et que de plus, la fonction étant strictement monotone, ce nombre est unique.

1. Recherche des deux suites



L'idée est la suivante,

★ Cas n°1 : Soit $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq k$ (cas du schéma) et on peut considérer que $\dfrac{a+b}{2}$ comme nouvelle borne supérieure (qui jouera le rôle que jouait b)

★ Cas n°2 : Soit à l'inverse $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < k$ et $\dfrac{a+b}{2}$ joue cette fois le rôle que jouait a.

On peut répéter ce processus à l'infini, l'amplitude de l'intervalle étant à chaque fois divisée par 2.

Les suites sont donc définies par :
$a_0 = a$ et $b_0 = b$. et :

★ Cas n°1 : Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq k$, alors $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$

★ Cas n°2 : Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, alors $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$

On va alors montrer successivement que :

1. $\forall n \in N$, $a_n < b_n$
2. (a_n) *est une suite croissante et* (b_n) *une suite décroissante*
3. $(b_n - a_n)$ *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *donc convergente vers 0.*
4. $\forall n \in N$, $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$

Il ne reste plus qu'à conclure à l'existence de c.
Dans un deuxième temps, on montrera l'unicité de c comme conséquence de la stricte monotonie de f.

1. Par récurrence : Soit (P_n) : $b_n - a_n > 0$.

1.1. Initialisation $a < b \Rightarrow b_0 - a_0 > 0$. La propriété est vraie à l'ordre 0.

1.2. Hérédité : supposons (P_n) vraie, c'est à dire $b_n - a_n > 0$.

★Cas n°1 : Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq k$, alors $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n$ donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} > 0$ (hyp de récurrence)

★Cas n°2 : Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, alors $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2}$ donc $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} > 0$

Ainsi, dans les deux seuls cas possibles, supposant (P_n) vraie, on montre que (P_{n+1}) l'est aussi. Elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

2. (a_n) est une suite croissante

★Cas n°1 :$a_{n+1} - a_n = 0$

★Cas n°2 :$a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ et $b_n - a_n > 0$ d'après ce qui précède.

Donc dans les deux cas, $a_{n+1} - a_n \geq 0$

La démonstration de (b_n) décroissante est rigoureusement identique.

3. On a établi dans le 1. que $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$ qui est bien la traduction de $(b_n - a_n)$ géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

La raison étant dans $]-1;1]$ la suite converge vers 0.

On a donc (a_n) croissante, (b_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Les suites sont donc adjacentes et convergent vers la même limite c.

4. Cette propriété découle directement du mode de construction des deux suites. Démontrons là par récurrence.

Soit $(P_n) : f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$

4.1. Initialisation : $f(a) \leq k \leq f(b) \Rightarrow f(a_0) \leq k \leq f(b_0)$ donc P_0 est vraie.

4.2. Hérédité : Supposons que P_n est vraie.c'est à dire $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$ Alors,

★Cas n°1 : $\left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = a_n \\ f(a_n) \leq k \end{array} \right. \Rightarrow f(a_{n+1}) \leq k$

et la condition du Cas n°1 est $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k \Rightarrow f(b_{n+1}) \geq k$ puisque $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

★Cas n°2 : $\left\{ \begin{array}{l} b_{n+1} = b_n \\ f(b_n) \geq k \end{array} \right. \Rightarrow f(b_{n+1}) \geq k$

et la condition du Cas n°1 est $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < k \Rightarrow f(a_{n+1}) < k \Rightarrow f(a_{n+1}) \leq k$ puisque $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

On a donc bien dans les deux cas, $f(a_{n+1}) \leq k \leq f(b_{n+1})$ donc P_{n+1} est vraie.

Par récurrence, P_n est vraie.pour tout $n \geq 0$.

Conclusion :

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$ puisque f est continue. De même $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) \leq k \leq f(b_n) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \leq k \leq \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$ (théorèmes généraux des limites)

Donc $f(c) \leq k \leq f(c) \Rightarrow \boxed{k = f(c)}$

Il ne reste plus qu'à prouver l'**unicité** de c comme conséquence de la stricte monotonie de f.

Supposons en effet qu'il existe un deuxième c' différent de c. Par exemple $c' < c$.

Alors, f étant strictement croissante, $c' < c \Rightarrow f(c') < f(c)$, donc $f(c') < k$ donc $f(c') \neq k$.

Par l'absurde, c' ne peut exister et c est unique.