Chapitre 1

La construction de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

1.1 Introduction

On se souvient que les nombres relatifs sont nés du besoin de résoudre dans $\mathbb{Z}$ des équations comme $x + 5 = 3$. De même alors que $2x = 4$ admet un solution unisque dans $\mathbb{Z}$, une équation comme $2x = 5$ n'en admet pas dans $\mathbb{Z}$. Cette équation pourrait provenir du besoin de partager 5 quantités entre deux personnes.

On va donc définir les nombres rationnels (fractions) suivant une dé&marche en tout point analogue à celle utilisée pour définir les entiers relatifs.

On se souvient qu'un entier relatif est une classe d'équivalence et qu'implicitement, il est le résultat d'une soustraction, même si le mot a été habilement évité pendant toute la présentation. Là encore, il va falloir définir une relation d'équivalence, et ls nombre rationnels serpnt des classes d'équivalence relatives à celle-ci. Implicitement, le rationnel sera le résultat d'une division qu'il faudra contourner. Ainsi $\dfrac{1}{2}$ sera le résultat de la division de 1 par 2, tout comme $\dfrac{2}{4}$ et $\dfrac{3}{6}$ par exemple. Et si ces division donnent le même résultat, c'set tout simplement d'après le schéma : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$ car $1 \times 4 = 2 \times 2$ et $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6}$ car $1 \times 6 = 2 \times 3$. Là encore, on contournera l'opération encore non définie (la division) avec la multiplication.

1.2 Définitions

1.2.1 Une relation d'équivalence :

Relation d'équivalence fondamentale

Théorème 1.1. *La relation $\mathcal{R}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ définie par $(x; y)\,\mathcal{R}\,(x'; y') \Leftrightarrow xy' = yx'$ est une relation d'équivalence.*

On va donc démontrer que cette relation est réflexive, symétrique et transitive.

Démonstration

Dans tout ce qui suit, $x, x', x"$ sont des entiers relatifs quelconques, $y, y', y"$ sont des entiers relatifs non nuls quelconques

Réflexivité : Facile puisque $xy = yx \Rightarrow (x; y)\,\mathcal{R}\,(x; y)$

Symétrie : $(x;y)\,\mathcal{R}\,(x';y') \Leftrightarrow xy' = yx'$

$\Leftrightarrow y'x = x'y$ commutativité de $\times$ dans $\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x'y = y'x$

$\Leftrightarrow (x';y')\,\mathcal{R}\,(x;y)$

Transitivité : remarquons déjà que si x est nul, $(0;y)\,\mathcal{R}\,(x';y') \Leftrightarrow 0 = yx'$

Et y étant non nul, $(0;y)\,\mathcal{R}\,(x';y') \Leftrightarrow x' = 0$

★ Si $x = 0$, $\left\{\begin{array}{c} (0;y)\,\mathcal{R}\,(x';y') \Leftrightarrow x' = 0 \\ (0;y')\,\mathcal{R}\,(x";y") \Leftrightarrow x" = 0 \end{array}\right.$ donc $(0;y)\,\mathcal{R}\,(0;y")$ prouve la transitivité dans ce cas particulier.

★ Si $x \neq 0$, $\left\{\begin{array}{c} (x;y)\,\mathcal{R}\,(x';y') \Leftrightarrow xy' = yx' \\ (x';y')\,\mathcal{R}\,(x";y") \Leftrightarrow x'y" = y'x" \end{array}\right.$ $\Rightarrow xy' \times x'y" = yx' \times y'x"$ en faisant les produits membre à membre.

Donc $xy" \times x'y' = yx" \times x'y'$ en utilisant associativité et commutativité de $\times$

Or $x' \neq 0$ puisque $x0$ de meêm que $y' \neq 0$. Ainsi $x'y' \neq 0$ et d'après la régularité de $\times$ dans $\mathbb{Z}$, $xy" = yx"$.

On a donc établi que $\left\{\begin{array}{c} (x;y)\,\mathcal{R}\,(x';y') \\ (x';y')\,\mathcal{R}\,(x";y") \end{array}\right. \Rightarrow (x;y)\,\mathcal{R}\,(x";y")$.

1.2.2 L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels

Nombre rationnel

Définition 1.1. *On appelle nombre rationnel toute classe d'équivalence de la relation d'équivalence définie ci-dessus sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. L'ensembles des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Q}$.*

Cette définition extrêmemnt théorique (mais absolument rigoureuse) ne doit pas faire oublier le concept intutif précédemment évoqué selon lequel le nombre $\dfrac{1}{2}$ est indifféremment le résultat des divisions de 1 par 2 ou de 2 par 4 ou de 3 par 6 donc sera désigné par les couples $(1;2)\,,(2;4)\,,(3;6)$ qui appartiennent tous à la même classe d'équivalence puisque $1 \times 4 = 2 \times 2$ et $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{6}$ car $1 \times 6 = 2 \times 3$.

Remarque : Tout couple $(a;b)$ pourra être considéré comme le représentant d'une classe d'équivalence (donc comme un rationnel) **dès lors que** $b \neq 0$.

1.2.3 Notation

Un entier relatif q devrait être noté $q = \overset{\circ}{\overbrace{(a;b)}}$ notation réservée à la classe d'équivalence du couple $(a;b)$. Ainsi, avec des notations évidentes, $q = q'$ si et seulement si $\overset{\circ}{\overbrace{(a;b)}} = \overset{\circ}{\overbrace{(a';b')}}$ donc si et seulement si $(a;b)\,\mathcal{R}\,(a';b')$.

On notera en fait $\overset{\circ}{\overbrace{(a;b)}}$ sous la forme $\dfrac{a}{b}$ (appelée fraction) où a est appelé numérateur et b dénominateur (non nul). Lorqu'on écrira $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ il faudra en fait comprendre $\overset{\circ}{\overbrace{(a;b)}} = \overset{\circ}{\overbrace{(a';b')}}$ c'est à dire $(a;b)\,\mathcal{R}\,(a';b')$ ou encore $ab' = ba'$ où on reconnait les produits en croix.

Dès lors, les manipulations des rationnels seront celles auxquelles on est habitués, l'égalité entre deux rationnels masquant le fait qu'il s'agit d'une égalité entre deux classes d'équivalence, c'est à dire que les deux représentants sont en relation l'un avec l'autre.

1.2.4 Simplification - Représentant privilégié d'une classe d'équivalence

Propriété : Soit $\dfrac{a}{b}$ un entier relatif quelconque. Alors, pour tout entier relatif k non nul, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ka}{kb}$

Evident puisque $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ka}{kb} \Leftrightarrow (a;b)\,\mathcal{R}\,(ka;kb)$ vrai puisque $a \times kb = b \times ka$.

Dans ces conditions de tous les représentans $\dfrac{ka}{kb}$ possibles, on préfèrera celui dont le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux (concept suppposé connu dans $\mathbb{Z}$). On reconnaît bien entendu ici la classique propriété de simplification d'une fraction.

Proposition 1.1. *Pour tout couple $(a;b)$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, il existe un unique $(p;q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{+*}$ tel que* $\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$

Où $p \wedge q$ désigne le pgcd de p et q.

$\dfrac{p}{q}$ est le représentant privilégié de $\dfrac{a}{b}$ (fraction irréductible).

Démonstration

Unicité : Supposons $\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{p}{q} \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{p'}{q'} \\ p' \wedge q' = 1 \end{cases}$

Alors $\begin{cases} \dfrac{p}{q} = \dfrac{p'}{q'} \\ p' \wedge q' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pq' = p'q \\ p' \wedge q' = 1 \end{cases} \Rightarrow p$ divise p' d'après le théorème de Gauss

Donc $\exists k \in \mathbb{Z} : p' = kp$ et en remplaçant dans $pq' = p'q$, il vient $pq' = kpq \Rightarrow q' = kq$

k est donc un diviseur de p' et de q' ; sachant que $p' \wedge q' = 1$ on a donc $k \in \{-1, +1\}$.

Or $q \in \mathbb{Z}^{+*}$ et $q' \in \mathbb{Z}^{+*}$. On a donc $k = 1$ et $\begin{cases} p = p' \\ q = q' \end{cases}$

Existence : Soit $\delta = a \wedge b$. On a alors $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$ avec $a' \wedge b' = 1$. (propriété 3.1. du chapitre précédent paragraphe arithmétique)

Ainsi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\delta a'}{\delta b'} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ avec $a' \wedge b' = 1$ prouve l'existence d'un tel couple.

1.3 L'addition dans $\mathbb{Q}$

1.3.1 Définition de l'addition dans $\mathbb{Q}$

L'addition dans $\mathbb{Q}$

Définition 1.2. $\forall (q, q) \in \mathbb{Z}^2 \begin{cases} q = \dfrac{a}{b}, (b \neq 0) \\ q' = \dfrac{a'}{b'}, (b' \neq 0) \end{cases}$ *alors* $q + q' = \dfrac{ab' + a'b}{bb'}$

Remarquons en premier que bb' étant non nul, $\dfrac{ab'+a'b}{bb'}$ est bien un élément de $\mathbb{Q}$. L'addition est donc une opération interne dans $\mathbb{Q}$.

Remarque : Dans le cas où $b = b'$, c'est à dire si les dénominateurs sont égaux, on obtient $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b} = \dfrac{ab + a'b}{b \times b} = \dfrac{b\,(a+a')}{b \times b} = \dfrac{a+a'}{b}$ après simplification. On retrouve les habitudes de réduction au même dénominateur.

1.3.2 Propriétés de l'addition

Retrouvons ci-dessous les propriétés bien connues de l'addition que sont l'asociativité, la commutativité, la régularité.

Associativité de l'addition dans $\mathbb{Q}$

Théorème 1.2. *L'addition dans $\mathbb{Q}$ est associative, c'est à dire que* $\forall\,(q, q', q") \in \mathbb{Z}^3, (q+q') + q" = q + (q' + q")$

Démonstration

$\forall\,(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \forall\,(a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \forall\,(a", b") \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*.$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) + \frac{a"}{b"} = \frac{ab' + a'b}{bb'} + \frac{a"}{b"}$$

$$= \frac{ab'b" + a'bb" + a"bb'}{bb'b"} \text{ en utilisant les propriétés de l'addition dans } \mathbb{Z}.$$

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{a'}{b'} + \frac{a"}{b"}\right) = \frac{a}{b} + \frac{a'b" + a"b'}{b'b"}$$

$$= \frac{ab'b" + a'bb" + a"bb'}{bb'b"} \text{ d'où } \left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) + \frac{a"}{b"} = \frac{a}{b} + \left(\frac{a'}{b'} + \frac{a"}{b"}\right)$$

Commutativité de l'addition dans $\mathbb{Q}$

Théorème 1.3. *L'addition dans $\mathbb{Q}$ est commutative, c'est à dire que* $\forall\,(q, q') \in \mathbb{Z}^2, q + q' = q' + q$

Démonstration

$\forall\,(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \forall\,(a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{ab' + a'b}{bb'}$ et $\dfrac{a'}{b'} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{a'b + ab'}{b'b}$.

Ainsi $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{a'}{b'} + \dfrac{a}{b}$ en utilisant la commutativité de $+$ et $\times$ dans $\mathbb{Z}$.

L'addition dans $\mathbb{Q}$ admet un élément neutre

Théorème 1.4. *L'addition dans $\mathbb{Q}$ admet un élément neutre :* $\frac{0}{1}$*, c'est à dire que* $\forall r \in \mathbb{Q}, q + 0 = 0 + q = q$ *avec* $0 = \frac{0}{1}$

Démonstration

$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \times 1 + 0 \times b}{b \times 1} = \frac{a}{b}$, et $\frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{0}{1}$ d'après la commutativité de $+$ dans $\mathbb{Q}$.

D'où $\frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$

Remarque. On convient de noter $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble $\mathbb{Q} - \left\{\frac{0}{1}\right\}$

Régularité de l'addition dans $\mathbb{Q}$

Théorème 1.5. *L'addition dans $\mathbb{Q}$ est régulière, c'est à dire que :*
$\forall (q, q', q") \in \mathbb{Z}^3, q + q' = q + q" \Rightarrow q' = q"$

Démonstration

$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \forall (a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \forall (a", b") \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*.$

$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} + \frac{a"}{b"} \Leftrightarrow \frac{ab' + a'b}{bb'} = \frac{ab" + a"b}{bb"}$

$\Leftrightarrow \frac{ab'b" + a'bb"}{bb'b"} = \frac{ab'b" + a"bb'}{bb'b"}$ en multipliant par $b"$ numérateur et dénominateur du membre de gauche et par b' ceux du membre de droite, d'après la propriété du 2.3.

Ainsi $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} + \frac{a"}{b"} \Leftrightarrow (ab'b" + a'bb")\, bb'b" = (ab'b" + a"bb')\, bb'b"$ produits en croix

$\Leftrightarrow ab'b" + a'bb" = ab'b" + a"bb'$ régularité de $\times$ dans $\mathbb{Z}$ avec $bb'b" \neq 0$

$\Leftrightarrow a'bb" = a"bb'$ régularité de $+$ dans $\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow a'b" = a"b'$ régularité de $\times$ dans $\mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{a"}{b"}$ d'où le résultat.

Proposition 1.2. *Addition membre à membre :*$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4, \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow a + c = b + d.$

Se démontre en utilisant deux fois la régularité de $+$: $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = b + c \\ c + b = d + b \end{cases} \Rightarrow a + c = b + d.$

Tout entier relatif admet un symétrique unique dans $\mathbb{Q}$

Théorème 1.6. *Pour tout entier relatif q, il existe un entier relatif unique q' tel que $q + q' = q' + q = 0$.*

Remarquons en premier lieu que la condition $q' + q = q + q'$, indispensable dans le cas général n'amène rien dans le cas d'une opération commutative.

Démonstration

Existence : $\forall q \in \mathbb{Q}$, posons $q = \dfrac{a}{b}, b \neq 0$

Alors $q' = \dfrac{-a}{b}$ vériifie les conditions attendues.

En effet, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a-a}{b} = \dfrac{0}{b} = 0$.

Unicité : L'unicité tient à la régularité de l'addition. Supposons en effet qu'il existe deux symétriques q' et q" de q.

Dès lors, on a $q + q' = q + q" \Rightarrow q' = q"$.

Remarques :

1. Dans le cas de l'addition le symétrique d'un nombre sera appelé opposé de celui-ci. On conviendra dans quelques lignes de noter $-q$ l'opposé de q. Notons le encore $opp(q)$ pour quelques instants Cette propriété d'existence d'un symétrique pour l'addition est la propriété fondamentale qui manquait aux entiers naturels. Elle complète les propriétés d'associativité et d'existence d'un élément neutre pour faire de l'ensemble $\mathbb{Q}$, muni de l'addition un **groupe**. L'addition étant commutative, ce groupe est commutatif.

2. L'opposé de l'opposé d'un nombre est le nombre lui-même. En effet, $q + opp(q) = 0$ se lit aussi $opp(q) + q = 0$ qui prouve que q est l'opposé de $opp(q)$.

3. Deux entiers relatifs ont même opposé si et seulement si ils sont égaux.

En effet $opp(q) = opp(q') \Rightarrow q+ opp(q) = q + opp(q')$ (régularité)

$\Rightarrow q + opp(q') = 0$ (puisque $q+ opp(q) = 0$)

$\Rightarrow q + opp(q') = q' + opp(q')$

$\Rightarrow q = q'$, l'addition étant régulière.

1.3.3 La soustraction dans $\mathbb{Q}$

La soustraction dans $\mathbb{Q}$

Définition 1.3. *On définit la soustraction dans$\mathbb{Z}$ par $\forall (q; q') \in \mathbb{Q}, q - q' = q + (-q')$*
où q' est l'oposé de q.

On vérifiera aisemment toutes les propriétés connues de la soustraction.

1.3.4 $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$

Il s'agit de démontrer que tout entier relatif est aussi un rationnel.

Principe de la démonstration : Il suffit de mettre en évidence une bijection φ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}$. Ainsi, à tout entier relatif n on pourra associer un unique rationnel $\varphi(n)$, et inversement, à tout rationnel $\varphi(n)$ on pourra associer un unique entier relatif n. Dans ces conditions, on pourra dire que l'antécédent et l'image, qui se correspondent mutuellement d'un manière unique peuvent être idéntifiés l'un à l'autre.

Démonstration

Soit $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$$n \longmapsto \frac{n}{1}$$

Montrons alors que φ est une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}$.c'est à dire que $\forall \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}, \exists! n \in \mathbb{N} \quad \frac{n}{1} = \varphi(n)$

L'existence est triviale

L'unicité : supposons que $\frac{n}{1}$ ait deux antécédents n et n' par φ. On a donc $\begin{cases} \varphi(n) = \frac{n}{1} \\ \varphi(n') = \frac{n}{1} \end{cases}$

Or, $\varphi(n') = \frac{n'}{1}$. On a donc forcément $\frac{n}{1} = \frac{n'}{1}$ donc $n \times 1 = n' \times 1$ Et $n = n'$. D'où l'unicité annoncée.

Voilà donc établi qu'à tout rationnel de la forme $\frac{n}{1}$ correspond d'une manière unique un entier relatif. Cette correspondance univoque permet d'identier l'entier relatif antécédent à son image dans $\mathbb{Q}$, et voilà que tout élément de $\mathbb{Z}$ devient un élément de $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Z}$ est donc inclus dans $\mathbb{Q}$. On dit qu'on a immergé $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$. L'entier relatif $\frac{n}{1}$ pourra alors être tout simplement noté n.

1.4 La multiplication dans $\mathbb{Q}$

1.4.1 Définition de la multiplication dans $\mathbb{Q}$

La multiplication dans $\mathbb{Q}$

Définition 1.4. *On définit l'opération $\times$ suivante :* $\forall (q, q') \in \mathbb{Q}^2$, $q = \frac{a}{b}$ *et* $q' = \frac{a'}{b'}$, $b \neq 0, b' \neq 0$

$$\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$$

Remarque : La multiplication ainsi définie est une opération interne, $\begin{cases} b \neq 0 \\ b' \neq 0 \end{cases} \Rightarrow bb' \neq 0$

1.4.2 Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{Q}$

Immersion de $(\mathbb{N}, \times)$ dans $(\mathbb{Z}, \times)$

Il s'agit de démontrer que la multiplication de deux éléments de $\mathbb{Z}$ est égale à la multiplication des deux rationnels auxquels ils sont égaux.

En effet, $\frac{n}{1} \times \frac{n'}{1} = \frac{nn'}{1 \times 1}$ donc $\frac{n}{1} \times \frac{n'}{1} = \frac{nn'}{1}$ qui est bien l'entier nn'

Associativité de la multiplication dans $\mathbb{Q}$

Théorème 1.7. *La multiplication dans $\mathbb{Q}$ est associative*

Démonstration

Conséquence immédiate de l'associativité de $\times$ dans $\mathbb{Z}$.

En effet $\forall (a; a'; a") \in \mathbb{Z}^3, \forall (b; b'; b") \in \mathbb{Z}^{*3}$, $\frac{a}{b}\left(\frac{a'}{b'} \times \frac{a"}{b"}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{a'a"}{b'b"}$

$$\begin{aligned} &= \frac{a(a'a")}{b(b'b")} \\ &= \frac{(aa')a"}{(bb')b"} \\ &= \frac{aa'}{bb'} \times \frac{a"}{b"} \\ &= \left(\frac{a}{b}\frac{a'}{b'}\right) \times \frac{a"}{b"} \end{aligned}$$

Commutativité de la multiplication dans $\mathbb{Q}$

Théorème 1.8. *La multiplication dans $\mathbb{Q}$ est commutative*

Démonstration

Montrons, que $\forall\ (a; a') \in \mathbb{Z}^2, \forall (b; b') \in \mathbb{Z}^{*2}$, $\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{a'}{b'} \times \frac{a}{b}$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} &= \frac{aa'}{bb'} \\ &= \frac{a'a}{b'b}, \text{ la multiplication étant commutative dans } \mathbb{Z} \\ &= \frac{a'}{b'} \times \frac{a}{b} \end{aligned}$$

La multiplication dans $\mathbb{Q}$ admet un élément neutre

Théorème 1.9. *La multiplication dans $\mathbb{Q}$ admet un élément neutre : $\frac{1}{1}$ noté* 1.

Démonstration

$\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$ et bien sur, d'après la commutativité de $\times$ dans $\mathbb{Q}$, $\frac{1}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

Distributivité de la multiplication sur l'addition dans $\mathbb{Q}$

Théorème 1.10. *Dans $\mathbb{Q}$, la multiplication est distributive sur l'addition*

Démonstration

Montrons que $\forall (a;a';a") \in \mathbb{Z}^3, \forall (b;b';b") \in \mathbb{Z}^{*3}$, $\frac{a}{b}\left(\frac{a'}{b'} + \frac{a"}{b"}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} + \frac{a}{b} \times \frac{a"}{b"}$

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}\left(\frac{a'}{b'} + \frac{a"}{b"}\right) &= \frac{a}{b} \times \frac{a'b" + a"b'}{b'b"} \\
&= \frac{a\,(a'b" + a"b')}{bb'b"} \\
&= \frac{aa'b" + aa"b'}{bb'b"} \text{ (distributivité dans } \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'autre part } \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} + \frac{a}{b} \times \frac{a"}{b"} &= \frac{aa'}{bb'} + \frac{aa"}{bb"} \\
&= \frac{aa'bb" + aa"bb'}{bb'bb"} \\
&= \frac{b\,(aa'b" + aa"b')}{b\,(b'bb")} \text{ (distributivité et associativité dans } \mathbb{Z} \text{)} \\
&= \frac{aa'b" + aa"b'}{b'bb"} \text{ (simplification par } b \neq 0 \text{)}
\end{aligned}$$

Notation définitive de l'opposé d'un nombre

On décide d'appeler -1 le nombre $\frac{-1}{1}$

Il suffit alors de remarquer que $opp\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b}$ et que $(-1) \times \frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$ pour pouvoir écrire que $opp(\frac{a}{b}) = (-1) \times \frac{a}{b}$

Et de prendre pour notation définitive que $\forall q \in \mathbb{Q}$, $-q$ pour $opp(q)$.

Régularité de la multiplication dans $\mathbb{Q}$

Théorème 1.11. *La multiplication est régulière dans $\mathbb{Q}^*$, c'est à dire que* $\forall (q;q') \in \mathbb{Q}^2, \forall q" \in \mathbb{Q}^*, q = q' \Leftrightarrow qq" = q'q"$
On remarquera que la condition nécessaire est vraie même pour $q" = 0$.

Démonstration

Posons $q = \dfrac{a}{b}, q' = \dfrac{a'}{b'}, q" = \dfrac{a"}{b"}$ avec $b \neq 0, b' \neq 0, b" \neq 0$ et $a" \neq 0$

$qq" = q'q" \Leftrightarrow \dfrac{aa"}{bb"} = \dfrac{a'a"}{b'b"}$

$\Leftrightarrow aa"b'b" = a'a"bb"$

$\Leftrightarrow ab' = a'b$ en simplifiant par $a"b"$ non nul puisque $a" \neq 0$ et $b" \neq 0$.

Proposition 1.3. *Multiplication membre à membre :* $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4, \begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow ac = bd$

En utilisant deux fois la régularité de $\times$: $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ac = bc \\ cb = db \end{cases} \Rightarrow ac = bd$

Le produit de deux rationnels est nul si et seulement si l'un des deux est nul

Théorème 1.12. *C'est à dire* $\forall (q;q') \in \mathbb{Q}^2$, $qq' = 0 \Leftrightarrow q = 0$ *ou* $q' = 0$

Démonstration

Posons $q = \dfrac{a}{b}$ et $q' = \dfrac{a'}{b'}$. Alors $qq' = \dfrac{aa'}{bb'}$

Donc $qq' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{aa'}{bb'} = 0$

$\Leftrightarrow aa' = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $a' = 0$ (propriété de $\mathbb{N}$: théorème 2.12)

1.5 Ordre dans $\mathbb{Q}$

1.5.1 Les sous-ensembles $\mathbb{Q}^+$ et $\mathbb{Q}^-$

Les sous-ensembles $\mathbb{Q}^+$ et $\mathbb{Q}^-$

Définition 1.5. *On convient de noter* $\mathbb{Q}^+ = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ / \ ab \geq 0\right\}$ *et* $\mathbb{Q}^- = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ / \ ab \leq 0\right\}$
On notera aussi $\mathbb{Q}^{+*} = \mathbb{Q}^+ - \left\{\frac{0}{1}\right\}$ *et* $\mathbb{Q}^{-*} = \mathbb{Q}^- - \left\{\frac{0}{1}\right\}$

Proposition 1.4. $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \left\{\frac{0}{1}\right\}$ *ou encore en utilisant la notation* $0 = \frac{0}{1}$, $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- = \{0\}$

Démonstration

On peut d'ores et déjà remarquer que $0 \in \mathbb{Q}^+$ et $0 \in \mathbb{Q}^-$ donc $0 \in \mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^-$

$\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- \Leftrightarrow \begin{cases} ab \leq 0 \\ ab \geq 0 \end{cases}$

Or la relation $\leq$ étant antisymétrique dans $\mathbb{Z}$, $\begin{cases} ab \leq 0 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Rightarrow ab = 0$.

Or b étant non nul, $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Ainsi $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^- \Leftrightarrow a = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = 0$$

Proposition 1.5. $\forall (a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^-$

Démonstration

On a démontré que dans $\mathbb{Z}$, $r \geq 0 \Leftrightarrow -r \leq 0$

dès lors, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \Leftrightarrow ab \geq 0$

$$\Leftrightarrow -ab \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a}{b} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{b} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^-$$

Proposition 1.6. *On démontre facilement que* $\forall\,(q;q')\in\mathbb{Q}$,

$$\left\{\begin{array}{c} q\in\mathbb{Q}^+ \\ q'\in\mathbb{Q}^+ \end{array}\right. \Rightarrow q+q'\in\mathbb{Q}^+$$

Démonstration

Soit $q=\dfrac{a}{b}$ et $q'=\dfrac{a'}{b'}$ avec $bb'\neq 0$

$$\left\{\begin{array}{c} q\in\mathbb{Q}^+ \\ q'\in\mathbb{Q}^+ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} ab\geq 0 \\ a'b'\geq 0 \end{array}\right.$$

Procédons par disjonction des cas en envisageant le cas où a et a' sont tous deux positifs, puis le cas où ils sont de signes contraires puis le cas où ils sont tous deux négatifs.

★ Soit $a\geq 0$ et $a'\geq 0$

mais alors $a'b'\geq 0\Rightarrow b'\geq 0$ et $ab\geq 0\Rightarrow b\geq 0$

$ab'+a'b\geq 0$ et $bb'\geq 0$ donc $(ab'+a'b)\times bb'\geq 0\Rightarrow \dfrac{ab'+a'b}{bb'}\in\mathbb{Q}^+$

C'est à dire $q+q'\in\mathbb{Q}^+$

★ Soit $a\geq 0$ et $a'\leq 0$

mais alors $a'b'\geq 0\Rightarrow b'\leq 0$ et $ab\geq 0\Rightarrow b\geq 0$

$ab'+a'b\leq 0$ et $bb'\leq 0$ donc $(ab'+a'b)\times bb'\geq 0\Rightarrow \dfrac{ab'+a'b}{bb'}\in\mathbb{Q}^+$

C'est à dire $q+q'\in\mathbb{Q}^+$

★ Soit $a\leq 0$ et $a'\geq 0$ se ramène au cas précédent.

★ Soit $a\leq 0$ et $a'\leq 0$

mais alors $a'b'\geq 0\Rightarrow b'\leq 0$ et $ab\geq 0\Rightarrow b\leq 0$

$ab'+a'b\geq 0$ et $bb'\geq 0$ donc $(ab'+a'b)\times bb'\geq 0\Rightarrow \dfrac{ab'+a'b}{bb'}\in\mathbb{Q}^+$

C'est à dire $q+q'\in\mathbb{Q}^+$

D'où le résultat par disjonction des cas.

On pourra redémontrer les règles des signes habituelles.

Relation d'ordre fondamentale

Définition 1.6. *On définit alors la relation $\leq$ dans $\mathbb{Q}$ par :* $\forall (q;q') \in \mathbb{Q}^2, q \leq q' \Leftrightarrow q' - q \in \mathbb{Q}^+$ *ou encore* $\frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$

Il s'agit bien d'une relation d'ordre

Théorème 1.1. *La relation $\leq$ ainsi définie est une relation d'ordre*

Démonstration

On va donc démontrer sa réflexivité, son antisymétrie et sa transitivité.

Réflexivité : $0 \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow$ donc $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ donc $\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$.

Antisymétrie : $\forall (a;a') \in \mathbb{Z}^2$, $\forall (b;b') \in \mathbb{Z}^{*2}$, $\begin{cases} \frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'} \\ \frac{a'}{b'} \leq \frac{a}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \\ \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}^+ \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \\ \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^- \end{cases} \text{(Propriété 4.2.)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} = 0 \text{ (Propriété 4.1.)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$$

Transitivité : $\forall (a;a';a") \in \mathbb{Z}^3$, $\forall (b;b';b") \in \mathbb{Z}^{*3}$, $\begin{cases} \frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'} \\ \frac{a'}{b'} \leq \frac{a"}{b"} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+ \\ \frac{a"}{b"} - \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}^+ \end{cases}$

D'après la propriété 4.3. on a donc $\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} + \frac{a"}{b"} - \frac{a'}{b'} \in \mathbb{Q}^+$

Ainsi $\begin{cases} \frac{a}{b} \leq \frac{a'}{b'} \\ \frac{a'}{b'} \leq \frac{a"}{b"} \end{cases} \Rightarrow \frac{a"}{b"} - \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ donc $\frac{a}{b} \leq \frac{a"}{b"}$ d'où la transitivité annoncée.

1.6 Immersion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$

On a déjà montré que $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$, mais on ne parlera d'immersion que lorsqu'on aura vérifié que :

La somme de deux entiers naturels est la même que la somme des deux relatifs auxquels ils sont égaux

Le produit de deux entiers naturels est le même que le produit des deux relatifs auxquels ils sont égaux

Deux entiers naturels et les deux relatifs auxquels ils sont égaux sont rangés dans le même ordre.

1.6.1 Immersion de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Q}, +)$

On a déjà immergé $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$. Montrons maintenant que l'addition de deux entiers relatifs est la même que ceux-ci soient considérés comme des éléments de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Q}$.

En effet, $\forall (n, n') \in \mathbb{Z}, \dfrac{n}{1} + \dfrac{n'}{1} = \dfrac{n+n'}{1}$ d'après la définition de $+$ dans $\mathbb{Q}$.

Or $\dfrac{n}{1}$ désigne l'entier naturel n , $\dfrac{n'}{1}$ l'entier naturel n', et $\dfrac{n+n'}{1}$ l'entier naturel $n+n'$. L'addition des entiers relatifs donne bien le même résultat que l'addition des rationnels correspondants.

D'où la compatibilité recherchée et l'immersion de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Q}, +)$

Remarque : avec la fonction φ définie ci-dessus et qui nous avait permis d'identifier n à $\dfrac{n}{1}$, on écrirait tout simplement $\varphi(n+n') = \varphi(n) + \varphi(n')$

1.6.2 Immersion de $(\mathbb{Z}, \times)$ dans $(\mathbb{Q}, \times)$

Montrons donc que la multiplication de deux entiers relatifs est la même que ceux-ci soient considérés comme des éléments de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Q}$.

En effet, $\forall (n, n') \in \mathbb{Z}, \dfrac{n}{1} \times \dfrac{n'}{1} = \dfrac{nn'}{1}$ d'après la définition de $\times$ dans $\mathbb{Q}$.

$\dfrac{n}{1}$ désignant l'entier relatif n, $\dfrac{n'}{1}$ l'entier relatif n', $\dfrac{nn'}{1}$ l'entier relatif nn' on a bien le résultat désiré.

1.6.3 Immersion de $(\mathbb{Z}, \leq)$ dans $(\mathbb{Q}, \leq)$

Il suffit maintenant de démontrer la compatibiité de l'ordre défini dans $\mathbb{Q}$ avec celui déjà existant dans $\mathbb{Z}$.

En d'autres termes, il faut prouver, que deux entiers relatifs sont rangés dans le même ordre qu'ils soient considérés comme éléments de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Q}$.

Ainsi, démontrons que $\forall (n, n') \in \mathbb{Z}^2, \dfrac{n}{1} \leq \dfrac{n'}{1} \Leftrightarrow n \leq n'$

Démonstration

En effet, $\dfrac{n}{1} \leq \dfrac{n'}{1} \Leftrightarrow \dfrac{n'}{1} - \dfrac{n}{1} \in \mathbb{Q}^+$

$$\Leftrightarrow \frac{n'-n}{1} \in \mathbb{Q}^+$$

$$\Leftrightarrow n'-n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow n \leq n'$$